

Επίλυση προβλημάτων Γυμνάσιο



Η συγγραφική ομάδα του my-book.gr

Περιεχόμενα

Θεωρητικό υπόβαθρο	4
Κατανόω το πρόβλημα	8
Λεξικό όρων	8
Οργάνωση πληροφοριών	8
Παράφραση	9
Οπτικοποίηση	10
Συνεργατικές ομάδες επίλυσης	11
Στρατηγικές επίλυσης	13
Αναλυτική λίστα	13
Η αλγεβρική γλώσσα	14
Διάγραμμα Venn	16
Σχέδιο – σχήμα	17
Επίλυση απλούστερης εκδοχής	18
Χρήση μαθηματικού τύπου	19
Αναγωγή στη μονάδα	20
Η μορφή των αριθμών	20
Δουλεύω προς τα πίσω	21
Εφαρμογή του σχεδίου και επαλήθευση	22
Ανασκόπηση	24
Κατηγορίες προβλημάτων	25
Προβλήματα ανάλυσης και λογικής	25
Προβλήματα με μία αριθμητική πράξη	27
Προβλήματα με συνδυασμό αριθμητικών πράξεων	27
Προβλήματα αναλογιών και αναγωγής στη μονάδα	28
Προβλήματα εξισώσεων	29

Θεωρητικό υπόβαθρο

Εισαγωγή

Σύμφωνα με τον Ούγγρο μαθηματικό, καινοτόμο της ευρετικής επίλυσης προβλημάτων και της μαθηματικής εκπαίδευσης, George Polya (1962), σκοπός της δευτεροβάθμιας μαθηματικής εκπαίδευσης είναι να διδάξει τα παιδιά πώς να σκέφτονται. Τα μαθηματικά δεν αποτελούνται 100% από φορμαλισμό, σχολαστικές και αυστηρές αποδείξεις θεωρημάτων. Περιέχουν μία γενναία δόση εικασίας, αναλογιών, μοτίβων που οδηγούν σε παρατηρήσεις (οι οποίες ασφαλώς θα αποδειχθούν εν τέλει). Η φιλοσοφία του Polya και το έργο του τον καθιέρωσαν ως τον ιδρυτή της σύγχρονης προσέγγισης της επίλυσης προβλημάτων στην εκπαίδευση (Pasmore, 2017). Έτσι, διακρίνουμε δύο περιόδους για τη μαθηματική εκπαίδευση και την επίλυση προβλημάτων: πριν και μετά τον Polya (Schoenfeld, 1987a).

Η έννοια του προβλήματος

Ως μαθηματικό πρόβλημα ορίζουμε μία άγνωστη κατάσταση για την οποία δεν διαθέτουμε άμεσα ένα μοντέλο αντιμετώπισης. Σκοπός της διαδικασίας επίλυσης του προβλήματος είναι να ανακαλύψουμε τον τρόπο προσέγγισης και να φτάσουμε στη λύση. Το πρόβλημα, λοιπόν, περιέχει εγγενώς έναν βαθμό δυσκολίας και γι' αυτό είναι ένας υποκειμενικός όρος, καθώς για κάποιον μπορεί να απαιτείται μία άγνωστη και απαιτητική μέθοδος ενώ για άλλον η προσέγγιση μπορεί να είναι γνωστή, καθιστώντας το «πρόβλημα» μία απλή «άσκηση» (Μαμμωνά-Downs & Παπαδόπουλος, 2017).

Μαθησιακές δυσκολίες και επίλυση προβλημάτων

Έρευνες δείχνουν ότι οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες αντιμετωπίζουν επιπλέον δυσκολίες κατά την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, καθώς οι γνώσεις τους είναι περισσότερο αποσπασματικές (Μπάρμπας, 2000). Η επίλυση ενός προβλήματος απαιτεί πολύπλοκες διεργασίες πρόσληψης, επεξεργασίας, οργάνωσης πληροφοριών και ανάκλησης μεθόδων (Παγώνη, 2014). Για την αντιμετώπιση των δυσκολιών κρίνεται σκόπιμη η διδασκαλία των μαθηματικών ως μία γλώσσα επικοινωνίας, με λέξεις-κλειδιά και πίνακες λεξιλογίου (Τζιβνίκου, 2015). Με τον τρόπο αυτό, ο μαθητής θα είναι ικανός να μεταφράσει τα στοιχεία του προβλήματος από τη μητρική του γλώσσα στην αλγεβρική διάλεκτο.

Ευρετική

Η αρχή της ευρετικής, δηλαδή της διερεύνησης και της ανακάλυψης, εδραιώθηκε στη σύγχρονη φιλοσοφία της εκπαίδευσης από τον Polya και προωθήθηκε από τον Schoenfeld (Παπαδόπουλος, 2009). Η προσέγγιση αυτή οδηγεί στην ανάπτυξη ατομικών στρατηγικών. Ορισμένες από αυτές φαίνεται να εμφανίζονται συχνότερα, ενώ ταυτόχρονα είναι κοινές και επομένως είναι χρήσιμο να διδαχθούν στους νέους μαθητές, ώστε να μπορούν να τις εξασκήσουν (Μαμμωνά-Downs & Παπαδόπουλος, 2017).

Συνεργατικές ομάδες επίλυσης

Δουλεύοντας σε μία ομάδα εξασκώ τις κοινωνικές μου δεξιότητες, το ομαδικό μου πνεύμα και την προσωπική μου ευθύνη.

Κατά την επίλυση ενός προβλήματος, μπορώ να ανταλλάξω ιδέες και στρατηγικές, να εκφράσω φωναχτά τις σκέψεις μου και να ακούσω διαφορετικές απόψεις.

Υπόδειγμα

Σε μία συγκέντρωση παλαιών συμμαθητών εμφανίστηκαν 100 άτομα. Ο καθένας έκανε ακριβώς μία χειραψία με όλους τους παρευρισκόμενους. Πόσες χειραψίες έγιναν συνολικά;

1ος λύτης

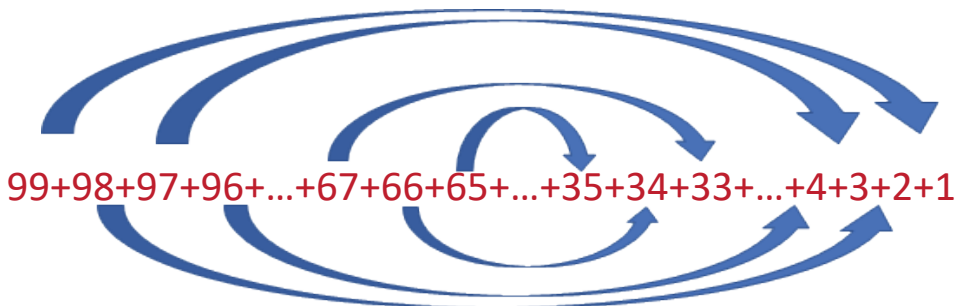


Κάθε καλεσμένος χαιρέτησε τους υπόλοιπους στα δεξιά του.

Άρα έγιναν $99+98+97+96+\dots+54+53+52+\dots+6+5+4+3+2+1$ χειραψίες.

Αλλά είναι πολύ δύσκολο να υπολογίσουμε αυτό το άθροισμα.

2ος λύτης



Έχω μία παρατήρηση: Τα ακραία ζευγάρια δίνουν άθροισμα 100.

Αλλά πόσα τέτοια ζευγάρια των 100 υπάρχουν συνολικά;

1ος λύτης

Νομίζω πως υπάρχουν 49 ζευγάρια και ένα 50άρι που περισσεύει στη μέση. Άρα, 49 φορές το 100, συν 50. $49 \cdot 100 + 50 = 4.950$

3ος λύτης

Εγώ σκέφτομαι κάτι άλλο. Ο καθένας τους έκανε 99 χειραψίες.

Άρα, έγιναν 99 επί 100, δηλαδή 9.900 χειραψίες.

2ος λύτης

Ναι όμως κάθε χειραψία τη μέτρησες διπλά, άρα να διαιρέσουμε διά δύο.

$9.900 : 2 = 4.950$. Όπως βρήκαμε και με τον άλλο τρόπο.

Διάγραμμα Venn

Τι είναι ένα διάγραμμα Venn;

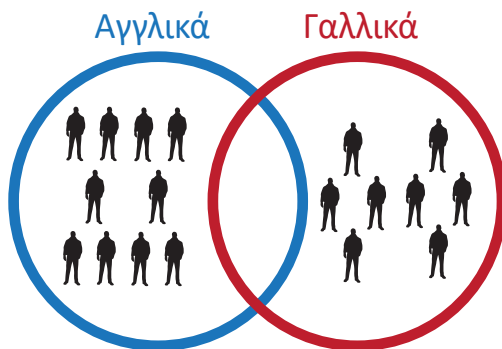
Είναι ένα διάγραμμα που αποτελείται από κύκλους και απεικονίζει τις λογικές σχέσεις μεταξύ ομάδων.



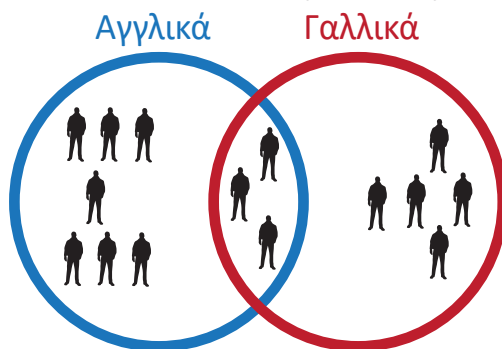
Με ένα διάγραμμα Venn μπορώ να απεικονίσω δεδομένα και χρησιμοποιώντας τη λογική μου να βγάλω χρήσιμα συμπεράσματα.

Υπόδειγμα

Από τα 15 παιδιά της τάξης, 10 μιλούν αγγλικά και 8 μιλούν γαλλικά. Πόσα παιδιά μιλούν και αγγλικά και γαλλικά;



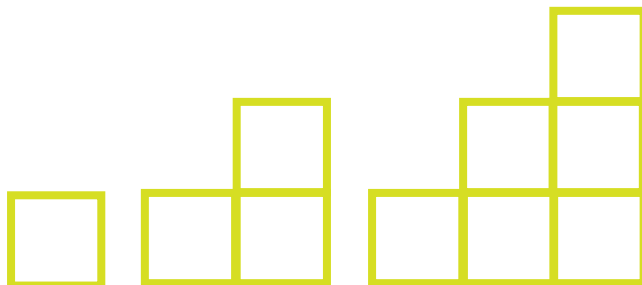
Η αρχική τοποθέτηση δεν βγάζει νόημα, γιατί έχει συνολικά 18 άτομα, δηλαδή 3 παραπάνω από όσα πρέπει. Άρα, πρέπει να ενώσω στο κέντρο 3 άτομα από κάθε ομάδα:



Κατηγορίες προβλημάτων

Προβλήματα ανάλυσης και λογικής

1. Με πόσους τρόπους μπορείς να χαλάσεις ένα 100ρικο χρησιμοποιώντας χαρτονομίσματα των 50€, 20€ και 10€;
2. Έχεις φτιάξει σκάλα με κύβους; (Polya, 1984)



- Για ένα σκαλί, θέλω έναν κύβο.
Για δύο σκαλιά, τρεις κύβους.
Για τρία σκαλιά, χρειάζονται έξι κύβοι.
Πόσοι κύβοι χρειάζονται για 15 σκαλιά;

3. Στο πρώτο εξάμηνο του τμήματος Μαθηματικών, προσφέρονται τα μαθήματα «Απειροστικός Λογισμός (Α.Λ.)», «Γραμμική Άλγεβρα (Γ.Α.)» και «Συνδυαστική (Σ)». Από τους 350 πρωτοετείς, 250 παρακολουθούν Α.Λ., 230 παρακολουθούν Γ.Α., 150 παρακολουθούν Σ, 100 παρακολουθούν Α.Λ. και Γ.Α., 30 παρακολουθούν Γ.Α. και Σ, 20 παρακολουθούν Α.Λ. και Σ και 70 παρακολουθούν και τα τρία μαθήματα. Πόσοι είναι οι φοιτητές που δεν παρακολουθούν κανένα μάθημα;
4. Δύο φυσικοί αριθμοί διαφέρουν κατά 2 και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι 130. Ποιοι είναι αυτοί οι αριθμοί;
5. Ο Αντρέας έχει 10 τσέπες και 44 κέρματα. Θέλει να τα τοποθετήσει έτσι ώστε κάθε τσέπη να έχει διαφορετικό αριθμό κερμάτων. Είναι αυτό εφικτό; (Polya)
6. Έχεις 4 μπλούζες (κόκκινη, μαύρη, λευκή, γκρι) και 3 παντελόνια (μπλε τζιν, μαύρο, γκρι). Πόσα διαφορετικά outfit μπορείς να φτιάξεις;

6. Ένα αντιπυρετικό φάρμακο για παιδιά γράφει στις οδηγίες «να δίνονται 2 κουταλιές φάρμακο για ένα παιδί με βάρος 25 κιλά». Αν το παιδί είναι 45 κιλά, πόσο φάρμακο πρέπει να του δώσουμε;
7. Ο φούρναρης γνωρίζει ότι με 10 κιλά αλεύρι παράγει 13 κιλά ψωμί. Αν έχει παραγγελία για 39 κιλά ψωμί, πόσα κιλά αλεύρι θα χρειαστεί;
8. Με έναν εκσκαφέα σκάβουμε ένα χωράφι σε 6 μέρες. Πόσους εκσκαφείς χρειαζόμαστε για να το σκάψουμε σε 2 μέρες;

Προβλήματα εξισώσεων

1. Ο Δημήτρης ξόδεψε το $\frac{1}{3}$ του μισθού του για ενοίκιο, το $\frac{1}{4}$ του μισθού του για τρόφιμα, το $\frac{1}{5}$ του μισθού του για λογαριασμούς και του έμειναν 460€. Ποιος ήταν ο μισθός του;
2. Δύο βιβλία έχουν συνολικά 320 σελίδες. Το μεγάλο βιβλίο έχει 100 σελίδες περισσότερες από το μικρό. Πόσες σελίδες έχει κάθε βιβλίο;
3. Ο Γιάννης συλλέγει κάρτες ποδοσφαιριστών. Συνολικά έχει 120 κάρτες. Οι 30 είναι από το ελληνικό πρωτάθλημα. Οι υπόλοιποι παίζουν σε αγγλικές και ισπανικές ομάδες. Έχει διπλάσιες κάρτες αγγλικού από ότι ισπανικού πρωταθλήματος. Πόσες κάρτες έχει από κάθε πρωτάθλημα;
4. Τρεις πίνακες ζωγραφικής πουλήθηκαν για συνολικά 2.800€. Κάθε πίνακας κόστιζε διπλάσια από τον προηγούμενο. Πόσο κόστιζε ο καθένας;
5. Στη φάρμα έχουμε άλογα και κότες. Μετρώντας κανείς θα βρει 12 κεφάλια και 34 πόδια. Πόσες είναι οι κότες και πόσα τα άλογα;
6. Σε μία γιορτή αρχικά οι άντρες ήταν διπλάσιοι από τις γυναίκες. Μετά από λίγο έφυγαν 10 ζευγάρια και οι άντρες που έμειναν ήταν τριπλάσιοι από τις γυναίκες. Να βρείτε πόσοι άντρες και πόσες γυναίκες υπήρχαν αρχικά.
7. Μία ομάδα ολοκλήρωσε το πρωτάθλημα με ίδιο αριθμό νικών, ισοπαλιών και ηττών, συγκεντρώνοντας συνολικά 40 βαθμούς. Από πόσους αγώνες αποτελείται το πρωτάθλημα; (νίκη = 3 πόντοι, ισοπαλία = 1 πόντος, ήττα = 0 πόντοι)